

Sur la transformation d'Abel-Radon des courants localement résiduels

BRUNO FABRE

Abstract. We give in this note a generalisation of the following theorem of Henkin and Passare (cf. [7] and [8]) : Let be Y an analytic subvariety of pure codimension p in a linearly p -concave domain U , and ω a meromorphic q -form ($q > 0$) on Y ; if the Abel-Radon transform $\mathcal{R}(\omega \wedge [Y])$, which is meromorphic on U^* , has a meromorphic prolongation to \tilde{U}^* containing U^* , then Y extends as an analytic subvariety \tilde{Y} of \tilde{U} , and ω as a meromorphic form on \tilde{Y} . We show the analogous statement when we replace $\omega \wedge [Y]$ by a current α of a more general type, called *locally residual*, if α is of bidegree $(N, 1)$, or $(q + 1, 1)$, $0 < q < N$ in the particular case where $\mathcal{R}(\alpha) = 0$.

Mathematics Subject Classification (2000) : 32C30, 44A12.

Introduction.

On commence dans les deux premiers paragraphes par introduire les deux objets que nous utiliserons par la suite, dans un contexte assez général: premièrement, les courants localement résiduels, et deuxièmement, la transformation d'Abel-Radon, dont la transformation d'Abel (cf.[5] et [4]) est un cas particulier. On montre pour la transformation d'Abel-Radon certaines propriétés de stabilité, en particulier que la transformation d'un courant localement résiduel est encore un courant localement résiduel.

Le problème principal étudié dans cette note peut alors se formuler de la manière suivante. On se donne un ouvert de l'espace projectif complexe \mathbb{P}_N , linéairement p -concave, i.e. réunion de p -plans complexes. On peut donc définir la transformation d'Abel-Radon \mathcal{R} , qui associe à un courant de bidegré (r, s) sur U un courant de bidegré $(r - p, s - p)$ sur U^* , l'ouvert de la grassmannienne $G(p, N)$ correspondant aux p -plans contenus dans U . Si α est un courant localement résiduel de bidegré (N, p) sur U , $\mathcal{R}(\alpha)$ est une n -forme méromorphe sur U^* ($n = N - p$). Alors, si $\mathcal{R}(\alpha)$ se prolonge sur un domaine \tilde{U}^* contenant U^* , peut-on prolonger α dans \tilde{U} comme courant localement résiduel ?

Nous donnons la réponse positive pour $p = 1$. On commence par étudier, étant donnée la projection standard $\phi : D \times \mathbb{C}_y \rightarrow D$, où D est un domaine de \mathbb{P}_n , la trace $\phi_*(\alpha)$ des courants localements résiduels α à support ϕ -propre. On montre que α peut se reconstruire, comme courant *résiduel*, à partir de ses traces $u_k := \phi_*(\alpha y^k)$, $k \in \mathbb{N}$; puis que si les u_k se prolongent méromorphiquement sur un domaine plus grand \tilde{D} , α se prolonge sur $\tilde{D} \times \mathbb{C}$ comme courant résiduel.

On applique ensuite ce théorème pour démontrer le théorème suivant:

Si U est un domaine de \mathbb{P}_N réunion de droites complexes, et α un courant localement résiduel de bidegré $(N, 1)$ sur U , si la transformation d'Abel-Radon de α , méromorphe sur U^* , se prolonge méromorphiquement sur un domaine \tilde{U}^* contenant U^* , alors α se prolonge comme courant localement résiduel sur le domaine $\tilde{U} := \cup_{t \in \tilde{U}^*} \Delta_t$ contenant U .

Ce théorème est une généralisation du théorème d'Henkin-Passare (cf. [8] et [7]), qui correspond au cas où α est de la forme $\omega \wedge [Y]$, au cas où α est à "support non-réduit", et résoud pour $N = 2$ un problème formulé dans [9]. Ce théorème d'Henkin-Passare est lui-même une généralisation du théorème de Griffiths, qui correspond au cas où la transformation d'Abel-Radon est nulle. Dans le cas où la transformation d'Abel-Radon est nulle, on peut déduire du théorème d'injectivité d'Henkin-Gindikin ([6]) un théorème d'extension pour tous les bidegrés $(q+1, 1)$, $0 < q < N$, comme on l'a montré dans [3], généralisant ainsi le théorème de Griffiths au cas non réduit.

On donne une application du théorème d'Henkin-Passare généralisé: étant donné un courant localement résiduel de bidegré $(N, 1)$ sur un domaine $U \subset \mathbb{P}_N$ linéairement 1-concave, tel que U^* est connexe, si U contient un 2-plan, le courant se prolonge à \mathbb{P}_N en un courant localement résiduel.

On termine par mentionner quelques questions ouvertes naturelles dans ce contexte. En particulier, on montre la difficulté pour généraliser le théorème de Griffiths au cas de courants localement résiduels de bidegrés $(q+2, 2)$.

REMERCIEMENTS.

Je remercie le professeur Tomassini pour son accueil à l'école normale supérieure de Pise, où j'ai pu terminer la rédaction de cet article, ainsi que pour les discussions encourageantes qu'il a bien voulu m'accorder. Je remercie d'ailleurs aussi d'autres mathématiciens pour des conversations fructueuses: G. Henkin, P. Mazet, J.-L. Sauvageot.

1 Rappels.

Il existe une seule manière d'associer à une variété différentiable orientée X de dimension n et à une n -forme continue à support compact ω sur X un nombre $\int_X \omega$, de sorte que:

- i) Pour X fixé, l'application $\omega \mapsto \int_X \omega$ est linéaire continue;
- ii) si X est un point P , affecté d'un signe σ , alors $\int_X \omega = \sigma \omega(P)$;
- iii) Si Y est un ouvert de X , à bord lisse, de bord ∂Y compact, orienté d'après l'orientation de Y , contenant le support de $d\omega$, alors $\int_Y d\omega = \int_{\partial Y} \omega$.

Soit X une variété différentiable de dimension n . Etant donné un compact $K \subset X$, on note \mathcal{D}_K l'espace des fonctions lisses à support dans K , muni de la topologie définie par les semi-normes $p_{m,K} := \sup_K D^m(f)$ (où

D^m est la dérivée m -ième de f), avec $0 \leq m < \infty$. On définit une topologie sur l'espace \mathcal{D} des fonctions lisses à support compact de la manière suivante: soit K_i une famille croissante de compacts de réunion X . Alors $\mathcal{D} = \cup_i \mathcal{D}_{K_i}$. On dit que U est un ouvert de \mathcal{D} ssi: $U \cap \mathcal{D}_{K_i}$ est un ouvert de \mathcal{D}_{K_i} pour tout i . Pour cette topologie, une suite de fonctions f_n tend vers 0 dans \mathcal{D} si:

- i) il existe un compact K contenant le support des f_n ;
- ii) f_n tend vers 0 dans \mathcal{D}_K .

On définit de manière analogue une topologie sur l'espace \mathcal{D}^p des p -formes lisses à support compact.

Definition 1 *Un courant de degré p est une forme linéaire continue sur \mathcal{D}^{n-p} . Une distribution est un courant de degré 0.*

Etant donné une fonction localement intégrable f , on lui associe une distribution $[f]$ par la formule: $[f](\phi) := \int_X f \phi$. On peut multiplier un courant T par une forme lisse ϕ , en posant: $(\phi \wedge T)(\psi) := T(\phi \wedge \psi)$. Alors un courant de degré p , dans un système de coordonnées locales x_1, \dots, x_n , s'écrit de manière unique comme $T = \sum_{I=(i_1 < \dots < i_p)} T_I dx^I$, avec T_I des distributions.

On étend les opérateurs de dérivation (ou champs de vecteurs) aux distributions, de sorte que $D[f] = [Df]$ si f est une fonction lisse, et $D(fg) = Df[g] + fDg$ si f est une distribution et g une fonction lisse. De même, on étend l'opérateur différentielle d , pour les distributions puis pour les courants : en coordonnées locales, $dT := \sum_i \partial_{x_i} T dx_i$ et $d \sum_I T_I dx^I := \sum_I dT_I \wedge dx^I$.

Soit X un espace analytique complexe réduit. Alors toute k -forme différentiable se décompose de manière unique en k -formes de bidegré (p, q) , avec $p + q = k$: $\omega := \sum_{p+q=k} \omega_{p,q}$; on en déduit que tout courant T de degré k se décompose $T = \sum_{p+q=k} T_{p,q}$, avec $T_{p,q}$ un courant de bidegré (p, q) , i.e. une (p, q) -forme à coefficients distributions. L'opérateur de différentiation d se décompose alors en somme : $d = \partial + \bar{\partial}$, de sorte que ∂ associe à toute forme (resp. courant) de bidegré (p, q) une forme (resp. courant) de bidegré $(p+1, q)$, et $\bar{\partial}$ associe à toute forme (resp. courant) de bidegré (p, q) une forme (resp. courant) de bidegré $(p, q+1)$.

2 Courants localement résiduels.

2.1 Valeur principale et résidu.

Soit X une variété analytique.

Etant donné une fonction méromorphe f sur X , on a une distribution $[f]$ bien définie en dehors de son ensemble polaire T . Si f est localement

intégrable, cette distribution s'étend de manière canonique en distribution sur X , comme on l'a vu dans le cas différentiable. Si f n'est pas localement intégrable, le fait que f est méromorphe permet de montrer l'existence d'un prolongement, comme courant. Mais on ne sait pas a priori faire un choix "canonique" parmi tous les prolongements possibles. Herrera et Lieberman ont montré dans [10] le théorème suivant :

Lemme 1 *Soit g une fonction holomorphe qui s'annule sur le pôle de f . Alors $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|g|=\epsilon} f\phi$ et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|g|>\epsilon} f\phi$ existent pour ϕ à support compact, et définissent des courants, notés respectivement $[f]$ et $Res_T(f)$. De plus, $Res_T(f) = \bar{\partial}[f]$.*

De manière générale, si ψ est une forme lisse, et on notera $[\psi f] := \psi[f]$.

Soit $\chi(x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et croissante telle que $\chi(x) = 0$ au voisinage de 0 et $\chi(x) = 1$ pour $x \geq 1$, et soit g une fonction holomorphe s'annulant sur l'ensemble polaire de f . Alors, on déduit de ce qui précède : $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi(|g|/\epsilon)[f] = [f]$ dans l'espace des distributions.

Définition 2 *Une distribution α sur X est dite d'extension standard si pour tout fonction holomorphe g non nulle sur un domaine U de X , et pour toute fonction lisse $\chi(x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ croissante telle que $\chi(x) = 0$ au voisinage de 0 et $\chi(x) = 1$ pour $x \geq 1$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi(|g|/\epsilon)\alpha = \alpha$ dans U .*

Alors, ce qui précède montre que la distribution $[f]$ est d'extension standard.

Donc :

Lemme 2 *Soit α un courant de bidegré $(q, 0)$. Supposons que :*

- i) α est $\bar{\partial}$ -fermé en dehors d'une hypersurface complexe.*
- ii) α est d'extension standard.*

Alors, $\alpha = [\omega]$ pour une certaine q -forme méromorphe ω .

Remarque 1 *L'autre propriété caractéristique de la valeur principale est la suivante : si D est une dérivation holomorphe, et f une fonction méromorphe, alors Df est encore méromorphe, et $[Df] = D[f]$.*

On suppose maintenant X un espace analytique réduit. Herrera et Lieberman ([10]) ont montré aussi dans ce cas l'existence du courant "valeur principale" et du courant résidu associé.

Définition 3 *La q -forme méromorphe ω sur X est dite abélienne si le courant $[\omega]$ sur Y est $\bar{\partial}$ -fermé.*

Soit ω une q -forme holomorphe, en dehors d'une hypersurface T de X , contenant $Sing(X)$. On a vu que si ω est méromorphe (i.e. admet un prolongement méromorphe à X), le courant $[\omega]$ se prolonge à X . Henkin et Passare ont montré dans [8] la réciproque :

Lemme 3 *Si le courant $[\omega]$ sur $X - T$ se prolonge en un courant α sur X , ω est méromorphe sur X . De plus, si $\bar{\partial}\alpha = 0$, alors ω est abélienne.*

Remarque 2 *Il existe en général des courants $\bar{\partial}$ -fermés de bidegré $(q, 0)$ à support dans $Sing(X)$.*

2.2 Courants localement résiduels de codimension quelconque.

Soit X une variété analytique de dimension n .

Supposons donnée $(f_1, \dots, f_p, f_{p+1})$ une suite régulière de fonctions holomorphes sur X (i.e. $f_1 = \dots = f_p = g$ est un sous-ensemble analytique de U de codimension $p + 1$). Alors on peut montrer (cf. [12]) que les limites, pour ϕ lisse à support compact :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{|f_1|=t\epsilon_1, \dots, |f_p|=t\epsilon_p} \phi/(f_1 \dots f_p),$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{|g| \geq t\epsilon_{p+1}, |f_1|=t\epsilon_1, \dots, |f_p|=t\epsilon_p} \phi/(f_1 \dots f_p g)$$

existent et sont indépendantes de $\epsilon := (\epsilon_1, \dots, \epsilon_p) \in \mathbb{R}_+^p$ (resp. $\epsilon' := (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{p+1}) \in \mathbb{R}_+^{p+1}$) en dehors d'un ensemble de mesure nulle; et que de plus, ces limites définissent des courants, notés $\bar{\partial}[1/f_1] \wedge \dots \wedge \bar{\partial}[1/f_p]$ et $[1/g]\bar{\partial}[1/f_1] \wedge \dots \wedge \bar{\partial}[1/f_p]$, de bidegrés $(0, p)$. Un tel courant, éventuellement multiplié par une q -forme holomorphe, s'appellera *courant résiduel* de codimension p .

Remarque 3 *On sait que sous certaines conditions relatives au "front d'onde", on peut multiplier les distributions. Il serait intéressant de savoir si, dans le cas où f_1, \dots, f_p, g forment une suite régulière de fonctions holomorphes, on peut multiplier les distributions $\partial_{\bar{z}_1}[1/f_1], \dots, \partial_{\bar{z}_p}[1/f_p], [1/g]$. Les notations précédentes se trouveraient alors parfaitement justifiées.*

De plus, on a :

i) $\bar{\partial}([1/g]\bar{\partial}[1/f_1] \wedge \dots \wedge \bar{\partial}[1/f_p]) = \bar{\partial}[1/g] \wedge \bar{\partial}[1/f_1] \wedge \dots \wedge \bar{\partial}[1/f_p]$. En particulier, $\bar{\partial}[1/f_1] \wedge \dots \wedge \bar{\partial}[1/f_p]$ est $\bar{\partial}$ -fermé.

ii) On a : $f_i[1/g]\bar{\partial}[1/f_1] \wedge \dots \wedge \bar{\partial}[1/f_p] = 0$. En particulier, le support est contenu dans $\{f_1 = \dots = f_p = 0\}$.

iii) Si le support d'un courant résiduel de codimension p est de codimension $p + 1$, alors il est nul.

On en déduit :

Lemme 4 *Le support d'un courant résiduel de codimension p est un ensemble analytique de codimension pure p .*

Définition 4 *Si un courant est résiduel au voisinage de tout point, il s'appellera localement résiduel (l.r.).*

Pour résumer :

i) Un courant l.r. de bidegré $(q, 0)$ est la valeur principale associée à une q -forme méromorphe.

ii) Etant donné un courant l.r. α $\bar{\partial}$ -fermé de bidegré (q, p) , il s'écrit localement sous la forme $\omega \wedge \bar{\partial}[1/f_1] \wedge \dots \wedge \bar{\partial}[1/f_p]$, avec ω une q -forme holomorphe. On peut le multiplier par un courant de la forme $[g]$, où g est une forme méromorphe dont le pôle coupe le support de α proprement. Alors, $\bar{\partial}([g]\alpha) = \bar{\partial}[g] \wedge \bar{\partial}\alpha$ est un courant l.r. de codimension $p + 1$.

Soit α un courant l.r. de bidegré (q, p) .

Définition 5 *L'ensemble polaire de α est le support de $\bar{\partial}\alpha$.*

En dehors de l'ensemble polaire de α (qui est un ensemble analytique de codimension $p + 1$), α s'écrit localement sous la forme $\omega \wedge \bar{\partial}[1/f_1] \wedge \dots \wedge \bar{\partial}[1/f_n]$, avec ω une q -forme holomorphe.

Si $p = n = \dim(X)$, et ω une n -forme holomorphe, f_1, \dots, f_n n fonctions holomorphes se coupant dans un ensemble *fini* de points (P_i) . Alors, le courant $\omega \wedge \bar{\partial}[1/f_1] \wedge \dots \wedge \bar{\partial}[1/f_n]$ peut se calculer sur la fonction constante 1; on obtient:

$$\omega \wedge \bar{\partial}[1/f_1] \wedge \dots \wedge \bar{\partial}[1/f_n](1) = \sum_{P_i} \text{Res}_{P_i} \omega / f_1 \dots f_n,$$

où Res est le résidu ponctuel de Grothendieck, comme on le voit en écrivant la définition du courant.

D'après J.-E. Björk ([1]), on peut caractériser les courants l. r. $\bar{\partial}$ -fermés sur X de la manière suivante. Soit α un courant de bidegré (q, p) . On suppose :

- 1) α à support dans un ensemble analytique Z de codimension pure p ;
- 2) $\bar{\partial}\alpha = 0$,

3) $\overline{I_Z}\alpha = 0$, i.e. pour tout germe en $z \in Z$ f_z de fonction holomorphe au voisinage de z , $\overline{f_z}\alpha = 0$ au voisinage de z ;

4) α est d'*extension standard*, c'est-à-dire que pour toute fonction holomorphe g dans un voisinage ouvert U_z d'un point $z \in Z$, telle que g ne s'annule sur aucune composante irréductible de $U_z \cap Z$, et tout $\chi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ croissante nulle dans un voisinage de 0 et égale à 1 pour x assez grand, on a $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi(|g|/\epsilon)\alpha = \alpha$ sur U_z .

Alors α est l. r., s'écrit donc dans un voisinage U_z d'un point arbitraire $z \in U$ sous la forme $\omega \wedge \overline{\partial}[1/f_1] \wedge \dots \wedge \overline{\partial}[1/f_p]$, avec ω une q -forme holomorphe et f_1, \dots, f_p des fonctions holomorphes formant une suite régulière sur U_z .

On voit plus généralement que la caractérisation reste valide si l'on remplace la deuxième condition par :

2') α est $\overline{\partial}$ -fermé en dehors d'un sous-ensemble analytique de codimension $p + 1$.

Soit Y un sous-ensemble analytique de X . Soit ω une q -forme méromorphe sur Y ; on a vu ci-dessus qu'on peut définir le courant valeur principale $[\omega]$ sur Y . Alors le courant $\omega \wedge [Y]$, est défini par $\omega \wedge [Y](\phi) := [\omega](i^*(\phi))$, avec i l'inclusion $i : Y \subset X$.

Lemme 5 *Soit Y un ensemble analytique de dimension pure. Le courant $\omega \wedge [Y]$ est l. r. .*

Démonstration.

Si Y est de codimension 1, c'est un résultat classique : ω est le résidu de Poincaré-Leray d'une $(q + 1)$ -forme méromorphe Ψ sur X à pôle logarithmique sur Y . Si on écrit $\Psi = \Psi'/g$, avec g coupant Y transversalement et Ψ' holomorphe en dehors de Y , on a : $\omega \wedge [Y] = [1/g]\overline{\partial}[\Psi']$. Supposons qu'on ait montré le lemme pour Y de codimension $p - 1$. Alors, localement, Y est contenu dans un ensemble analytique Y' de codimension $p - 1$, et le courant $[\omega]$ sur Y définit un courant sur Y' . On a donc : $\omega \wedge [Y] = [1/g]\overline{\partial}(\Psi' \wedge [Y'])$, avec Ψ' une certaine forme méromorphe sur Y' . Mais on sait que $\Psi' \wedge [Y']$ est l.r. . g étant une fonction méromorphe coupant Y proprement, il en est de même de $[1/g]\overline{\partial}(\Psi' \wedge [Y']) = \omega \wedge [Y]$. ■

3 Transformation d'Abel-Radon.

3.1 Image directe d'un courant.

Soit un morphisme analytique $\phi : Y \rightarrow X$ entre deux variétés analytiques complexes de dimension pure, avec $\dim(Y) = \dim(X) + p$. On peut associer à tout courant α de bidegré (r, s) sur Y , tel que la restriction de ϕ au support

$Supp(\alpha)$ de α est propre, un courant $\phi_*(\alpha)$ (l'image directe de α par ϕ) de même bidimension sur X , donc de bidegré $(r-p, s-p)$, par la formule $\phi_*(\alpha)(\psi) := \alpha \wedge \phi^*(\psi)(1)$. Le membre de droite est bien défini, car le courant $\alpha \wedge \phi^*(\psi)$ est à support compact, et peut donc s'étendre de manière unique en forme linéaire continue sur les formes lisses (avec la topologie définie par les semi-normes $p_{m,K}$).

Si $r < p$ ou $s < p$, l'image directe est nulle. De plus, comme ϕ est analytique, ϕ_* commute avec l'opérateur $\bar{\partial}$ sur les courants à support ϕ -propre. En effet $\phi_*(\bar{\partial}\alpha)(\psi) = \bar{\partial}\alpha(\phi^*(\psi)) = \alpha(\bar{\partial}\phi^*(\psi))$ soit comme $\bar{\partial}\phi^*(\psi) = \phi^*(\bar{\partial}\psi)$, $\bar{\partial}(\phi_*(\alpha))(\psi)$.

Supposons maintenant $Y := X \times F$, avec F une variété analytique de dimension p , X une variété analytique de dimension n , et $\phi : Y \rightarrow X$ la projection standard.

On définit les formes *verticales* sur Y , de la manière suivante. Une forme ψ est verticale si, étant donné des coordonnées locales y_1, \dots, y_p sur un ouvert V de F et des coordonnées locales x_1, \dots, x_n sur un ouvert U de X , la forme s'écrit localement sur $U \times V$ sous la forme $\sum_{I,J} \psi_{I,J} dy^I \wedge d\bar{y}^J$, avec $\psi_{I,J}$ des fonctions sur $U \times V$; on pose comme d'habitude $dy^I := dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_q}$. En particulier, les indices de degré d'une telle forme sont inférieurs à p .

Soit maintenant ψ une forme sur Y de bidegré (r, s) arbitraire. On se place au-dessus d'un ouvert U de X , avec des coordonnées x_1, \dots, x_n . ψ s'écrit de manière unique sous la forme : $\psi = \sum_{I,J \subset \{1, \dots, n\}} \psi_{I,J} dx^I \wedge d\bar{x}^J$, où les $\psi_{I,J}$ sont des formes verticales. Comme les indices de degré de $\psi_{I,J}$ sont inférieurs à p , les multiindices I et J intervenant dans la somme sont nécessairement de longueur respectivement supérieures à $r' := r - p$ et $s' := s - p$. Si $r < p$, ou $s < p$, on a vu que $\phi_*([\psi]) = 0$. Supposons $r, s \geq p$.

$$\psi = \sum_{I=(i_1, \dots, i_{r'}), i_1 < \dots < i_{r'}, J=(j_1, \dots, j_{s'}), j_1 < \dots < j_{s'}} \psi_{I,J} dx^I \wedge d\bar{x}^J + \psi',$$

où ψ' regroupe les termes correspondant à $card(I) > r'$ ou $card(J) > s'$. On a vu que $\phi_*([\psi']) = 0$. On en déduit :

$$\phi_*(\psi) = \sum_{I,J, card(I)=r', card(J)=s'} \phi_*(\psi_{I,J}) dx^I \wedge d\bar{x}^J,$$

où $\psi_{I,J}$ sont des formes verticales de bidegré (p, p) .

Il reste donc à calculer $\phi_*(\psi)$, pour ψ verticale de bidegré (p, p) . Soit dans ce cas ψ_x la forme sur F obtenue pour une valeur x fixée. Alors, d'après le théorème de Fubini, $\mu(x) := \int_F \psi_x$ est *intégrable* et :

$$\int_{X \times F} \psi \wedge f(x) dx \wedge d\bar{x} = \int_X f(x) dx \wedge d\bar{x} \int_F \psi_x.$$

En particulier, si ψ est intégrable, on voit donc que le courant $\phi_*(\psi)$ est représenté par la fonction intégrable $\mu(x) := \int_F \psi_x$. Si ψ est de classe \mathcal{C}^k à support compact, on a (cf. par exemple Schwartz,[13]) $\mu(x) := \int_F \psi_x$ est de classe \mathcal{C}^k . On en déduit, pour tous les bidegrés :

Lemme 6 *Si ψ est de classe \mathcal{C}^k , $\phi_*(\psi)$ est de classe \mathcal{C}^k .*

Supposons $(r, s) = (N, p)$. Alors ψ s'écrit sur $U \times F$ de manière unique $\psi = \psi' \wedge dx$, avec $dx := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ ($n := \dim(X)$) et ψ' une (p, p) -forme verticale. On a vu que : $\phi_*(\psi) = \int_F \psi'_x dx$. Remarquons que ψ'_x peut aussi s'écrire le résidu de Poincaré-Leray $\text{res}_{F_x} \psi / ((X_1 - x_1) \dots (X_n - x_n))$ ($F_x := \phi^{-1}(x)$), avec pour $P \in Y$, $X_i(P) := x_i(\phi(P))$.

Soit maintenant α un courant l. r. de bidegré (N, p) sur Y . Pour tout point $z \in Y$, on a donc un voisinage ouvert U_z de z , tel que sur U_z on ait : $\alpha = [\omega/g_z] \wedge \bar{\partial}[1/f_{1z}] \wedge \dots \wedge \bar{\partial}[1/f_{pz}]$, où ω est une N -forme holomorphe, et $(f_{1z}, \dots, f_{pz}, g_z)$ une suite régulière de fonctions holomorphes sur U_z .

On suppose que la restriction de ϕ au support Z de α est propre. Donc la fibre $F_x = \phi^{-1}(x)$ coupe Z en un nombre fini de points $P_i(x) := (x, y_i(x))$.

De ce qui précède on déduit le lemme suivant, qui nous servira par la suite:

Lemme 7 *$\phi_*(\alpha)$ est une n -forme méromorphe sur X ; sur U , en coordonnées locales x_1, \dots, x_n , $\phi_*(\alpha) = \mu(x)dx$. On a, en dehors de l'hypersurface $\phi(\text{Pol}(\alpha))$ de X :*

$$\mu(x) = \text{Res}(\alpha / (X_1 - x_1) \dots (X_n - x_n))(1),$$

où $\text{Res}(\alpha / h_1 \dots h_n)$ est défini localement par la formule:

$$\text{Res}(\alpha / (X_1 - x_1) \dots (X_n - x_n) := \text{Res} \omega / (f_1 \dots f_p (X_1 - x_1) \dots (X_n - x_n)).$$

On peut encore écrire : $\mu(x) = \sum_i \text{Res}_{P_i(x)} \omega'_x / f_1 \dots f_p$, où ω' est la p -forme verticale telle que $\omega = \omega' \wedge dx$, les $P_i(x)$ sont les points d'intersection de la fibre F_x avec le support de α , et $\text{Res}_{P_i(x)}$ est le résidu ponctuel de Grothendieck.

Démonstration.

Plaçons-nous au-dessus d'un ouvert de $X' := X - \phi(\text{Pol}(\alpha))$, ayant des coordonnées locales x_1, \dots, x_n . Alors, écrivons $\alpha := \alpha' \wedge dx$, avec α' un courant vertical (un courant étant une forme à coefficients distributions, on a une définition analogue à celle donnée pour les formes. Alors, α' est un courant vertical $\bar{\partial}$ -fermé de bidegré (p, p) à support ϕ -propre. Donc : $\phi_*(\alpha')$ est

la fonction holomorphe définie par $\int_{F_x} \alpha'$. Mais, d'après ce qu'on a vu, si α' est donné localement aux points par $\text{Res}_{f_1, \dots, f_p} \omega' / f_1 \dots f_p$, alors : $\int_{F_x} \alpha$ est la somme des résidus ponctuels. Donc $\phi_*(\alpha)$ est une n -forme holomorphe sur X' , donnée localement par $\mu(x)dx$, et $\mu(x) = \sum_i \text{Res}_{P_i(x)} \omega' / f_1 \dots f_p$. De plus, comme $\phi_*(\alpha)$ reste d'extension standard, c'est un courant valeur principale, à pôle dans $\phi(\text{Pol}(\alpha))$. ■

On a calculé l'image directe d'une forme lisse ou d'un courant l. r. à support ϕ -propre pour une projection ϕ .

Supposons maintenant qu'on ait comme morphisme analytique $\phi : Y \rightarrow X$ une *submersion*, d'un espace analytique réduit Y sur une variété analytique X de dimension n . Cela signifie que ϕ est localement trivialisable, i.e. qu'il existe pour tout point $z \in Y$ un voisinage ouvert U_z et un biholomorphisme $\mu_z : D_{p(z)} \times V_z \simeq U_z$, tel que $\phi = \pi \circ \mu_z^{-1}$, avec π la projection naturelle $\pi : D_{\phi(z)} \times V_z \rightarrow D_{\phi(z)}$, et $D_{\phi(z)}$ un voisinage ouvert de $\phi(z)$. Si $y \in Y$ est un point régulier, cela revient à dire la différentielle $d\phi_y$ est de rang maximum n , d'après le théorème des fonctions implicites.

Soit α un courant sur Y tel que la restriction de ϕ sur le support de α est propre.

Lemme 8 Si $\alpha = [\psi]$, avec ψ une forme de classe \mathcal{C}^k , $\phi_*(\alpha) = [\rho]$, avec ρ une forme de classe \mathcal{C}^k .

Démonstration.

On considère un recouvrement d'ouverts relativement compacts $(U_i)_{i \in I}$ de Y par des ouverts sur lesquels ϕ est trivialisable. On se donne une partition de l'unité associée χ_i .

Soit ψ une forme \mathcal{C}^k sur Y , ϕ -propre. On a : $\psi = \sum_{i \in I} \rho \chi_i$, et donc $\phi_*(\psi) = \sum_{i \in I} \phi_*(\chi_i \psi)$. La somme est bien définie, car pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage U_x relativement compact, tel que $\phi^{-1}(\overline{U_x}) \cap \text{supp}(\psi)$ est compact, donc au-dessus de U_x $\sum_{i \in I} \psi \chi_i$ est égale à une somme finie $\sum_{i \in J} \psi \chi_i$, et sur U_x l'image directe est la somme des images directes. Chaque terme de la somme est \mathcal{C}^k , d'après ce qu'on a vu pour les projections; donc la somme est de classe \mathcal{C}^k . ■

On se donne maintenant un morphisme analytique $\phi : Y \rightarrow X$ entre deux espaces analytiques de dimension pure X et Y , avec $\dim(Y) = \dim(X) + p$. On suppose qu'il existe un sous-ensemble analytique S d'intérieur vide, telle que $\phi^{-1}(S)$ est aussi d'intérieur vide et $\phi : Y - \phi^{-1}(S) \rightarrow X - S$ est une submersion.

On considère un courant l. r. α sur Y , tel que la restriction de ϕ au support de α est propre.

Lemme 9 *Supposons α l. r. de bidegré $(q + p, p)$ sur Y , d'ensemble polaire $Pol(\alpha)$. Alors $\phi_*(\alpha)$ est de la forme $[\omega]$, sur X , avec ω une q -forme méromorphe à pôle contenu dans $\phi(Pol(\alpha)) \cup Sing(X)$. Si α est $\bar{\partial}$ -fermé, ω est abélienne sur X .*

Démonstration.

Premièrement, en dehors de $\phi(Pol(\alpha)) \cup Sing(Y)$, $\phi_*(\alpha)$ est l'image directe d'un courant de bidegré $(q + p, p)$ $\bar{\partial}$ -fermé. C'est donc un courant $\bar{\partial}$ -fermé de bidegré $(q, 0)$, donc une q -forme holomorphe.

D'après le lemme [8], cette forme holomorphe s'étend sur T en une forme méromorphe ω . De plus, si α est $\bar{\partial}$ -fermé, alors $\phi_*(\alpha)$ est $\bar{\partial}$ -fermé; il en est donc de même de $[\omega]$.

■

Remarque 4 *Supposons $\dim(X) = \dim(Y)$, et $\phi : Y \rightarrow X$ propre. Si $\alpha = [\psi]$ pour une forme méromorphe ψ sur X , la forme méromorphe ω telle que $\phi_*([\psi]) = [\omega]$ s'appelle la trace de ω pour ϕ , et se note encore $\phi_*(\psi)$. Si ψ est abélienne, $\phi_*(\psi)$ l'est aussi.*

Lemme 10 *Supposons $S = \emptyset$, i.e. $\phi : Y \rightarrow X$ est une submersion. Alors, si α est l. r. de bidegré (r, s) , à support ϕ -propre, $\phi_*(\alpha)$ est l. r. de bidegré $(r - p, s - p)$.*

Démonstration.

Soit $\beta := \phi_*(\alpha)$. D'après le théorème de Remmert, si Z est le support de α , $Z' := \phi(Z)$, qui est le support de β , est un sous-ensemble analytique de X . Alors, $\overline{I_Z}$ annule α , donc $\overline{I_{Z'}}$ annule β . On vérifie également que β est $\bar{\partial}$ -fermé sur un ouvert de Zariski dense de Z' . Enfin, l'image directe d'un courant d'extension standard par une submersion reste d'extension standard. Ces trois propriétés suffisent d'après ce qu'on a vu pour caractériser les courants l. r. . On en déduit que $\phi_*(\alpha)$ est l. r. . ■

3.2 Image inverse d'un courant par une submersion.

Soit $\phi : X \rightarrow Y$ une submersion analytique; l'image directe d'une forme lisse à support compact est une forme lisse à support compact. On définit alors l'image inverse d'un courant β sur X par $(\phi^*(\beta), \psi) := (\beta, \phi_*(\psi))$. On vérifie $\phi^*(\beta \wedge \psi) = \phi^*(\beta) \wedge \phi^*(\psi)$ pour une forme lisse ψ . De plus :

Proposition 1 *Si β est un courant l. r., $\phi^*(\beta)$ l'est aussi, et le résidu commute avec l'image inverse :*

$$\phi^*([1/g] \wedge \bar{\partial}[1/f_1] \wedge \dots \wedge \bar{\partial}[1/f_k]) = [1/\phi^*(g)] \bar{\partial}[1/\phi^*(f_1)] \wedge \dots \wedge \bar{\partial}[1/\phi^*(f_k)].$$

Démonstration.

D'abord, $\phi^*(f_1), \dots, \phi^*(f_k), \phi_*(g)$ forment toujours une suite régulière, puisque la codimension de $\phi^*(f_1) = \dots, \phi^*(f_k) = \phi_*(g) = 0$ est la même que celle de $f_1 = \dots = f_k = g = 0$. Il suffit de vérifier la proposition lorsque ϕ est une projection, puisqu'une submersion est localement équivalente à une projection. Soit ψ une forme lisse à support compact sur $Y = F \times X$. On obtient :

$$\int_{F \times X} [1/\phi^*(g)] \bar{\partial}[1/\phi^*(f_1)] \wedge \dots \wedge \bar{\partial}[1/\phi^*(f_p)] \wedge \psi = \int_X [1/g] \wedge \bar{\partial}[1/f_1] \wedge \dots \wedge \bar{\partial}[1/f_p] \wedge \int_{F_x} \psi,$$

en écrivant les définitions, par la formule de Fubini généralisée. ■

On a de plus :

Lemme 11 *Soit $\phi : Y \rightarrow X$ une submersion. Soit Z un sous-ensemble analytique de X . Soit ω une forme méromorphe sur Z . Alors : $\phi^*(\omega \wedge [Z]) = \phi^*(\omega) \wedge [\phi^{-1}(Z)]$.*

3.3 Transformation d'Abel-Radon.

On se donne les objets suivants :

- i) Un espace analytique réduit X de dimension pure N .
- ii) Un espace de paramètres T , espace analytique réduit de dimension pure.
- iii) Une variété d'incidence $I \subset T \times X$, sous-ensemble analytique, avec les projections naturelles $p_1 : I \rightarrow T$ et $p_2 : I \rightarrow X$ et les propriétés suivantes :
 - 1) I est de dimension pure $\dim(T) + p$.
 - 2) La projection $p_1 : I \rightarrow T$ est propre, et telle qu'il existe un sous-ensemble analytique $S \subset T$ d'intérieur vide, tel que $p_1^{-1}(S)$ est encore d'intérieur vide, et que la restriction de p_1 à $I - p_1^{-1}(S)$ est une submersion.
 - 3) La projection $p_2 : I \rightarrow X$ est une submersion.

Cette troisième condition nous permet de définir, comme on l'a vu ci-dessus, l'image inverse $p_2^{-1}(\alpha)$ d'un courant α sur X . Comme p_1 est propre, on peut prendre l'image directe de ce courant par p_1 , qui est par définition la *transformée d'Abel-Radon* de α :

Definition 6

$$\mathcal{R}(\alpha) = p_{1*}(p_2^*(\alpha)).$$

La transformation associe donc à un courant de bidegré (r, s) un courant de bidegré $(r - p, s - p)$.

Soit Y un sous-ensemble analytique de X de codimension pure p . Alors, posons $I_Y := p_2^{-1}(Y) \subset I$. I_Y définit une famille de zéros-cycles sur Y ,

avec les deux projections $\pi_1 : I_Y \rightarrow T$ et $\pi_2 : I_Y \rightarrow Y$. On peut définir la transformation d'Abel d'une forme méromorphe ω sur Y , par $\mathcal{A}(\omega) := \pi_{1*}(\pi_2^*(\omega))$, qui est une forme méromorphe sur T (cf.[4]). Alors :

Proposition 2 $\mathcal{A}(\omega) = \mathcal{R}(\omega \wedge [Y])$.

Démonstration.

On a $p_2^*(\omega \wedge [Y]) = p_2^*(\omega) \wedge [I_Y]$. De plus, $p_{1*}(\psi \wedge [I_Y]) = p_{1|U_Y*}(\psi)$, avec $\psi := p_2^*(\omega)$. ■

Lemme 12 \mathcal{R} commute avec les opérateurs $d, \bar{\partial}, \partial$.

Démonstration.

On a déjà vu que les opérateurs $d, \bar{\partial}, \partial = d - \bar{\partial}$ sur les courants commutent avec l'image directe par une application holomorphe propre. On a vu aussi que ces opérateurs sur les courants commutent avec l'image inverse par une submersion analytique. ■

Corollaire 1 Supposons α une courant $\bar{\partial}$ -fermé de bidegré $(q+p, p)$. Alors $\mathcal{R}(\omega)$ définit une q -forme abélienne sur T .

Proposition 3 Supposons $p_1 : I \rightarrow T$ une submersion. Si α est un courant l. r., alors $\mathcal{R}(\alpha)$ est encore un courant l. r. .

Démonstration.

On a vu que l'image inverse par une submersion d'un courant l. r. reste localement résiduel, de même que pour l'image directe. ■

3.4 Un théorème d'extension.

Soit D un domaine d'une variété analytique X . On considère la projection standard $\phi : D \times \mathbb{C} \rightarrow D$.

On se donne sur $U := D \times \mathbb{C}$ un courant α résiduel de bidegré $(n+1, 1)$, $\bar{\partial}$ -fermé. On a donc une $(n+1)$ -forme méromorphe ψ sur U , telle que $\alpha = \bar{\partial}[\psi]$. On suppose que la restriction de ϕ au support de α est propre. Comme la restriction de ϕ au support de α est propre, on peut définir le courant image directe $\phi_*(\alpha)$.

Sur un ouvert U de X avec des coordonnées locales x_1, \dots, x_n , on note $dx := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, et $\overline{dx} := \overline{dx_1} \wedge \dots \wedge \overline{dx_n}$.

On définit la 1-forme méromorphe verticale ω telle que $\psi = \omega \wedge dx$; on note ω_z sa restriction sur $F_z := \phi^{-1}(z)$. Alors, ce qui précède montre que :

Lemme 13 Sur U , $\phi_*(\alpha y^k) = u_k(x)dx$, avec u_k une fonction holomorphe, définie par : $u_k(x) = \sum \text{Res}_{y_i(x)} \omega_x$, où les points $y_i(x)$ sont les pôles de ω_x sur F_x , et où Res désigne le résidu classique d'une 1-forme méromorphe dans \mathbb{C} .

Lemme 14 Supposons que pour tout $k \geq 0$, on ait $u_k(x) = 0$. Alors, $\alpha = 0$.

Démonstration.

En effet, supposons que α soit non nul. Alors ψ est méromorphe, et pour un x générique, ω_x est aussi méromorphe. On ne peut donc pas avoir : $\sum_{y_i(x)} \text{res}_{y_i(x)} \omega_x y^k = 0$ pour tout k . ■

Considérons le corps K des fonctions méromorphes sur D . On peut multiplier le courant l.r. α , à support ϕ -propre, par n'importe quelle fonction méromorphe $Q \in K[y]$, puisque le pôle de Q coupe le support de α proprement. L'ensemble des Q tels que $Q\alpha = 0$ forme un idéal dans l'anneau principal $K[y]$, est donc engendré par un élément $P = y^d + a_1(x)y^{d-1} + \dots + a_d(x)$, de degré minimal d .

Lemme 15 Les fonction méromorphes $a_i(x)$ sont en fait holomorphes.

Démonstration.

En effet, soit $D' \subset D$ l'ouvert de Zariski sur lequel toutes les a_i sont holomorphes. Au-dessus de D' , on a $\text{Supp}(\alpha) = \{P = 0\}$. Supposons $D' \neq D$. Alors, soit $x \in D - D'$, et U_x un voisinage ouvert de x relativement compact dans D . Alors $\phi^{-1}(\overline{U_x}) \cap \text{Supp}(\alpha)$ ne serait pas compact, ce qui contredit l'hypothèse. ■

En prenant l'image directe par ϕ de $y^k P(x, y)\alpha = 0$, on obtient :

Lemme 16 On a $u_{k+d}(x) + a_1(x)u_{k+d-1}(x) + \dots + a_d(x)u_k(x) = 0$ pour tout entier $k \geq 0$.

Soit la fonction holomorphe $r(x, y) := y^{d-1}u_0(x) + y^{d-2}(u_1(x) + a_1(x)u_0(x)) + \dots + (u_{d-1}(x) + a_1(x)u_{d-2}(x) + \dots + a_{d-1}(x)u_0(x))$.

Alors :

Lemme 17 $\alpha = \overline{\partial}[r(x, y)dx \wedge dy / P(x, y)]$.

Démonstration.

Considérons la série formelle $\psi := \sum_{k \geq 0} u_k(x)/y^{k+1}$. D'après le lemme précédent, on a l'égalité formelle : $P(x, y)\psi = r(x, y)$. D'autre part, considérons la fonction méromorphe : $r(x, y)/P(x, y)$. Pour x fixé, on peut

réduire la fraction rationnelle en éléments simples, et développer en puissances de $1/y$. On obtient donc une série, qui converge uniformément pour $|y| \geq R(x) > \max_i y_i(x)$. Les coefficients obtenus doivent être égaux aux $u_k(x)$.

Soit $\beta := \overline{\partial}[r(x, y)dx \wedge dy/P(x, y)]$. D'après le lemme 13 précédent, on a $\phi_*(\beta y^k) = v_k(x)dx$, avec $v_k(x) := \sum_{y_i(x)} \text{res}_{y_i(x)} r(x, y)y^k/P(x, y)dy$ pour tout $k \geq 0$, soit encore, pour un $R(x)$ assez grand :

$$1/2i\pi \int_{|y|=R(x)} r(x, y)y^k/P(x, y)dy.$$

L'intégrande vaut encore, comme on vient de voir, $\sum_{j \geq 0} u_k(x)/y^{j+1-k}$, et la somme converge uniformément pour $|y| = R(x)$. L'intégrale de la somme est donc la somme des intégrales; un seul terme est non nul, c'est $u_k(x)$. On a donc finalement $\phi_*(\beta y^k) = u_k(x)dx$, pour tout $k \geq 0$. D'après le lemme 14, on obtient $\alpha = \beta$. ■

Lemme 18 *Le déterminant de la matrice $M = (u_{d+i-j-1}(x))_{1 \leq i, j \leq d}$ est non identiquement nul.*

Démonstration.

Supposons que le déterminant soit identiquement nul. On considère la matrice comme un endomorphisme de K^d , où K est le corps des fonctions méromorphes sur D . Si le déterminant est nul, on a un vecteur propre associé à la valeur propre nulle. On a donc une relation linéaire $b_1(x)u_{d-1+k}(x) + \dots + b_d(x)u_k(x) = 0$, pour $k = 0, \dots, d-1$. Mais alors, les équations $u_{k+d}(x) + a_1(x)u_{k+d-1}(x) + \dots + a_d(x)u_k(x) = 0$, valables pour tout k , impliquent que $b_1(x)u_{d-1+k}(x) + \dots + b_d(x)u_k(x) = 0$ reste valide pour $k \geq d$. Mais cela implique

$$\phi_*(y^k(b_1(x)y^{d-1} + \dots + b_d(x))\alpha) = 0,$$

pour tout $k \geq 0$. On en déduit que $(b_1(x)y^{d-1} + \dots + b_d(x))\alpha = 0$. Cela implique que $(b_1(x)y^{d-1} + \dots + b_d(x))$ est multiple de $P(x, y)$, ce qui est impossible, car le polynôme en y $P(x, y)$ est de degré d . ■

Remarque 5 *Dans le cas où le support de α est "réduit", on peut calculer le déterminant de la manière suivante. Supposons $\alpha := \omega \wedge [Y]$, où Y est le support de α et ω une n -forme méromorphe sur Y . On peut écrire $\omega_i = f_i(x)dx$, sur les différentes composantes Y_i de Y au-dessus d'un voisinage ouvert de $x_0 \in D$. Alors, le déterminant s'écrit*

$$\prod_{i < j} (y_i(x) - y_j(x))^2 \prod_{i=1}^d f_i(x).$$

Théorème 1 *Supposons que dans la situation précédente, tous les $u_k(x)$ se prolongent méromorphiquement à un domaine \tilde{D} contenant D . Alors, α se prolonge à un courant l. r. $\tilde{\alpha}$ défini sur $\tilde{D} \times \mathbb{C}$, et sans composante verticale, i.e. son support, ne contient pas d'hypersurface de la forme $\phi^{-1}(H)$, $H \subset \tilde{D}$.*

Démonstration.

On considère les équations $u_{k+d}(x) + \tilde{a}_1 u_{k+d-1}(x) + \dots + \tilde{a}_d u_k(x) = 0$, soit encore: $\tilde{a}_1 u_{k+d-1}(x) + \dots + \tilde{a}_d u_k(x) = -u_{k+d}(x)$, où on considère les \tilde{a}_i comme des inconnues. On écrit les équations pour $k = 0, \dots, d-1$. On obtient un système carré d'équations linéaires, à coefficients dans le corps K des fonctions méromorphes sur \tilde{D} .

Le lemme ci-dessus montre que le déterminant du système est non identiquement nul sur D , donc, comme il est méromorphe sur \tilde{D} , il n'est pas non plus identiquement nul sur \tilde{D} . Il admet donc des solutions \tilde{a}_i uniques, qui doivent donc coïncider avec a_i sur D (qui sont les solutions uniques du système sur D).

On prolonge donc $P(x, y)$, ainsi que $r(x, y)$, en fonctions méromorphes \tilde{P} et \tilde{r} sur $\tilde{D} \times \mathbb{C}$. Considérons le courant $\bar{\partial}[\tilde{r}(x, y)/\tilde{P}(x, y)dx \wedge dy]$. C'est un courant résiduel sur $\tilde{D} \times \mathbb{C}$, qui coïncide avec α sur $D \times \mathbb{C}$, et qui est sans composante verticale. ■

Remarquons la possibilité, même si les $u_k(x)$ se prolongent en fonctions holomorphes, que les prolongements $\tilde{a}_i(x)$ sur \tilde{D} des coefficients $a_i(x)$ holomorphes sur D soient méromorphes sur \tilde{D} .

Le lemme suivant est une variante du lemme 3 ci-dessus, variante qui nous sera utile par la suite.

Lemme 19 *Soit Y une hypersurface analytique de $D \times \mathbb{C}$, telle que la restriction de $\phi : D \times \mathbb{C} \rightarrow D$ à Y soit propre. Soit Z un sous-ensemble analytique de Y d'intérieur vide dans Y . α un courant l.r. de bidegré $(n+1, 1)$ sur $D \times \mathbb{C} - Z$, à support dans $Y - Z$, $\bar{\partial}$ -fermé. Si pour tout $k \geq 0$, $u_k(x)$ se prolonge méromorphiquement à travers $Z' := \phi(Z)$, alors α se prolonge de manière unique en un courant l. r. β à travers Z . Si les u_k se prolongent holomorphiquement, β est $\bar{\partial}$ -fermé.*

Démonstration.

On associe à α comme ci-dessus le polynôme $P(x, y) := y^d + a_1(x)y^{d-1} + \dots + a_d(x)$, dont les coefficients sont holomorphes sur $D - Z'$. Le support de α dans $D - Z$, d'équation $\{P(x, y) = 0\}$, est contenu dans Y . Donc son adhérence dans $D \times \mathbb{C}$ est une réunion de composantes de Y . On en déduit que les $a_i(x)$ se prolongent holomorphiquement dans D . On définit également comme ci-dessus la fonction $r(x, y) := y^{d-1}u_0(x) + y^{d-2}(u_1(x) +$

$a_1(x)u_0(x)) + \dots + (u_{d-1}(x) + a_1(x)u_{d-2}(x) + \dots + a_{d-1}(x)u_0(x))$, avec $\alpha = \bar{\partial}[r(x, y)/P(x, y)dx \wedge dy]$ sur $(D - Z') \times \mathbb{C}$. Si les u_0, \dots, u_{d-1} se prolongent holomorphiquement, $r(x, y)$ d'après son expression se prolonge aussi holomorphiquement, et $\tilde{\alpha} := \bar{\partial}[\tilde{r}dx \wedge dy/\tilde{P}]$ est un prolongement $\bar{\partial}$ -fermé de α sur $D \times \mathbb{C}$, à support dans Y , et coïncide avec α en dehors de Z . Supposons que les u_k se prolongent *méromorphiquement* à travers Z' . Soit $x_0 \in Z'$. Soit $G(x)$ une fonction holomorphe en x_0 telle que Gu_k ($0 \leq k \leq d-1$) soient holomorphes dans un voisinage ouvert U_{x_0} de x_0 . Alors Gr se prolonge holomorphiquement, soit $R(x, y)$ sur $U_{x_0} \times \mathbb{C}$. Alors $1/G\bar{\partial}[R/\tilde{P}]$ est un prolongement l.r. de α sur $U_{x_0} \times \mathbb{C}$, dont le support est contenu dans Y , et donc coïncide avec α en dehors de Z . Le prolongement est unique, puisque Z est de codimension deux. ■

3.5 Un cas particulier : la transformation par rapport aux p -plans.

Soit $G(1, N)$ la grassmannienne des p -plans complexes, et $I\mathbb{P}_N \subset G(p, N) \times \mathbb{P}_N$ la variété d'incidence; on note p_1 et p_2 les deux projections standard $p_1 : I\mathbb{P}_N \rightarrow G(p, N)$ et $p_2 : I\mathbb{P}_N \rightarrow \mathbb{P}_N$. Remarquons que $I\mathbb{P}_N$ est lisse.

Soit U un ouvert linéairement p -concave de \mathbb{P}_N , i.e. réunion de p -plans complexes (pour $p = N-1$, on dit simplement : linéairement concave). On définit l'ouvert $U^* \subset G(p, N)$ comme l'ouvert correspondant aux p -plans contenus dans U , et la variété d'incidence $I_U = p_1^{-1}(U^*) \subset U^* \times U$; on note encore p_1 et p_2 les deux projections standard $p_1 : I_U \rightarrow U^*$ et $p_2 : I_U \rightarrow U$, ou p_1^U et p_2^U lorsqu'on a besoin de préciser l'ouvert.

On vérifie :

i) $\dim(I_U) = \dim(U^*) + p$, la fibre $p_1^{-1}(t) = \{t\} \times H_t$ étant de dimension p ;

ii) $p_1 : I_U \rightarrow U^*$ est propre, puisque $p_1^{-1}(K) = p_1^{\mathbb{P}_N^{-1}(K)}$;

iii) $p_2 : I_U \rightarrow U$ est une submersion. En effet, soit $(H_P, P) \in I_U$ un point quelconque, avec $P \in U$ et $H_P \subset U$ un p -plan passant par P . On se donne dans H_P un $(p-1)$ -plan H' en dehors de P . On définit, sur un voisinage ouvert U_P de P dans U , un morphisme analytique : $s_P : U_P \rightarrow I_U$, avec $p_2 \circ s_P = Id_{U_P}$, de la manière suivante : pour $Q \in U_P$, $s_P(Q)$ est le p -plan contenant H' et passant par Q . Alors, pour tout vecteur tangent v à U en P , $v = dp_2(ds_P(v))$, avec $ds_P(v)$ un vecteur tangent à I_U en (H_P, P) ; $dp_2 : T_{(H_P, P), I_U} \rightarrow T_{P, U}$ est donc surjective, ce qui équivaut, par le théorème des fonctions implicites, comme (H_P, P) est un point régulier, à dire que p_2 est localement trivialisable en (H_P, P) . On a donc une submersion analytique $p_2 : I_U \rightarrow U$.

Par l'axiome du choix, il existe une section s de p_2 , i.e. une application

$s : U \rightarrow I_U$ telle que $p_2 \circ s = Id_U$. Mais il n'existe pas en général de section continue.

Définition 7 *On dit que U est continûment linéairement p -concave, si on peut trouver une section $s : U \rightarrow I_U$ continue.*

Lemme 20 *Supposons que U est continûment linéairement p -concave. Alors, soit α un courant $\bar{\partial}$ -fermé de bidegré (N, p) . α est $\bar{\partial}$ -exact ssi $\mathcal{R}(\alpha) = 0$.*

Démonstration.

La preuve pour les formes lisses découle des formules de représentation intégrale de Henkin-Gindikin (cf. [6]). Soit α un courant de bidegré (N, p) . Alors, $\alpha = \bar{\partial}\beta + \psi$, avec β un courant et ψ une forme lisse de bidegré (N, p) . Alors $\mathcal{R}(\alpha) = 0$ implique à $\mathcal{R}(\psi) = 0$ donc $\psi = \bar{\partial}\mu$, donc $\alpha = \bar{\partial}(\beta + \mu)$. ■

Lemme 21 *Soit f une fonction méromorphe sur Δ^N , où Δ est le disque $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Alors pour $(z_1^0, \dots, z_{i-1}^0, z_{i+1}^0, \dots, z_N^0)$ fixés dans un ouvert Zariski-dense de Δ^{N-1} , on peut considérer $f_i(z_i) := (z_1^0, \dots, z_{i-1}^0, z_i, z_{i+1}^0, \dots, z_N^0)$ méromorphe par rapport à la variable restante $z_i \in \Delta$. On suppose f_i rationnelle lorsqu'elle est définie, pour chaque $i, 1 \leq i \leq N$. Alors f est rationnelle.*

Démonstration.

Le lemme a été montré pour $N = 2$ par W. Kneser ([11]). La démonstration s'adapte pour N plus grand. ■

Lemme 22 *Soit U un domaine de \mathbb{P}_N . Si U contient une droite complexe, alors toute q -forme méromorphe ψ définie sur U s'étend en une q -forme rationnelle sur \mathbb{P}_N .*

Démonstration.

On se ramène aisément au cas d'une fonction méromorphe, en écrivant ψ comme combinaison, à coefficients méromorphes, de formes rationnelles élémentaires $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}$, avec x_1, \dots, x_N un choix convenable de coordonnées affines.

Le cas de la fonction méromorphe peut se montrer de plusieurs manières. Une est donnée dans [5]. Une autre est basée sur le fait que l'ouvert U est pseudoconcave au sens d'Andreotti; on reverra cette notion plus loin. La preuve la plus élémentaire est basée sur le lemme précédent. Soit un point P sur la droite complexe Δ dont on suppose l'existence, et un hyperplan H ne contenant pas P . Choisir un système de coordonnées affines ayant P comme origine et H comme hyperplan à l'infini revient à se donner

N points dans H ; à savoir, les N points $P_i (1 \leq i \leq N)$, intersection de H avec les droites $x_1 = Cst, \dots, x_{i-1} = Cst, x_{i+1} = Cst, \dots, x_N = Cst$. Choisissons ces N points dans $H \cap U$, et de sorte que les N droites $x_1 = 0, \dots, x_{i-1} = 0, x_{i+1} = 0, \dots, x_N = 0$ soient contenues dans U (il suffit de les choisir suffisamment proches de $\Delta \cap H$). Alors, f est méromorphe de x_1, \dots, x_N dans un voisinage de l'origine, et elle est méromorphe sur toutes les droites $x_1 = x_1^0, \dots, x_{i-1} = x_{i-1}^0, x_{i+1} = x_{i+1}^0, \dots, x_N = x_N^0$, pour tout $(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \dots, x_N^0)$ dans un ouvert de Zariski dense d'un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}^{N+1}$; donc rationnelle. f s'exprime donc rationnellement en fonction des coordonnées affines (x_1, \dots, x_N) . ■

Théorème 2 *Soit $U \subset \mathbb{P}_N$ un domaine linéairement 1-concave. Soit α un courant de bidegré $(q+1, 1)$, localement résiduel, sur U . Supposons $\mathcal{R}(\alpha) = 0$. Alors, α se prolonge de manière unique à un courant l. r. $\tilde{\alpha}$ sur \mathbb{P}_N ; $\tilde{\alpha} = \bar{\partial}[\psi]$, pour une forme rationnelle ψ sur \mathbb{P}_N .*

Démonstration.

Tout d'abord, supposons que U soit *continûment* linéairement 1-concave, et α $\bar{\partial}$ -fermé. D'après le lemme 20, on déduit de $\mathcal{R}(\alpha) = 0$ que $\alpha = \bar{\partial}\beta$, pour un certain courant β de bidegré $(q+1, 0)$. Alors β est défini par une $(q+1)$ -forme holomorphe en dehors du support Y de α . De plus, cette forme holomorphe doit se prolonger en une forme méromorphe sur U , d'après le lemme 3. On note cette forme méromorphe ψ . On a alors: $\alpha = \bar{\partial}[\psi] + (\bar{\partial}\beta - [\psi])$, d'une part, et d'autre part sur chaque ouvert U_i d'un recouvrement, $\alpha = \bar{\partial}[\psi_i]$, car α est localement résiduel. Sur U_i , on a donc $\bar{\partial}[\psi_i - \psi] = \bar{\partial}\beta - [\psi]$; en particulier, $[\psi_i - \psi + h] = (\beta - [\psi])$ pour une $(q+1)$ -forme holomorphe h sur U_i . Mais le courant "valeur principale" $[\psi_i - \psi + h]$ est d'extension standard, le membre de droite nous montre qu'il est nul en dehors de Y ; il est donc nul sur U_i . On a donc $\alpha = \bar{\partial}[\psi_i] = \bar{\partial}[\psi]$ sur U_i .

D'autre part, on a vu que la forme méromorphe ψ sur U se prolonge en une forme rationnelle $\tilde{\psi}$ sur \mathbb{P}_N . $\tilde{\alpha} := \bar{\partial}[\tilde{\psi}]$ est donc un prolongement de α .

Dans le cas général, considérons une droite Δ contenue dans U , et un voisinage U_Δ de Δ continûment linéairement 1-concave. Alors, on obtient un prolongement $\tilde{\alpha}_\Delta$ de $\alpha|_{U_\Delta}$. Mais $\tilde{\alpha}_\Delta = \alpha$ sur U . En effet, si la différence était non nulle, son support, qui est une hypersurface analytique de U , devrait rencontrer la droite Δ .

Pour la même raison, le prolongement est unique. ■

Théorème 3 *Soit U un ouvert de \mathbb{P}_N linéairement p -concave. Soit α un courant l. r. de bidegré $(N, 1)$ dans U . Alors $\mathcal{R}(\alpha)$ est méromorphe sur U^* . α est $\bar{\partial}$ -fermé ssi $\mathcal{R}(\alpha)$ est holomorphe. On suppose que $\mathcal{R}(\alpha)$*

se prolonge méromorphiquement dans un domaine \tilde{U}^* . Alors α se prolonge dans \tilde{U} comme courant l. r. .

Soit $U \subset \tilde{U}$ deux domaines linéairement 1-concaves. Soit $a \in U$. On note $\mathbb{P}_{N-1}^a \subset G(1, N)$ l'ensemble des droites passant par a , et $D_a := U^* \cap \mathbb{P}_{N-1}^a$, et $\tilde{D}_a := \tilde{U}^* \cap \mathbb{P}_{N-1, a}^a$. Soit $U_a := \cup_{t \in D_a} \Delta_t - \{a\}$, $\tilde{U}_a := \cup_{t \in \tilde{D}_a} \Delta_t - \{a\}$. On définit, pour tout point $a \in \tilde{U}$, la projection $p_a : \tilde{U}_a \rightarrow \tilde{D}_a$, qui à un point P associe la droite qui la relie à a .

Soit α un courant l. r. à support dans l'ouvert linéairement 1-concave U , de support Y . On se donne un point a en dehors du support de α . Alors $p_a : U_a \rightarrow D_a$, restreinte au support de α , est propre, et on peut définir son image directe $p_{a*}(\alpha)$.

Lemme 23 $p_{a*}(\alpha) = \mathcal{R}(\alpha)|_{D_a}$

Démonstration.

On a $\mathcal{R}(\alpha)|_{D_a} = p_{1*}(p_2^*(\alpha)|_{I_a})$, avec $I_a := p_1^{-1}(D_a)$. Mais $p_2 : I_a \rightarrow U_a$ est inversible, d'inverse $s_a : U_a \rightarrow I_a, x \mapsto (p_a(x), x)$. Donc $\mathcal{R}(\alpha)|_{D_a} = p_{1*}(s_{a*}(\alpha)) = (p_1 \circ s_a)_*(\alpha) = p_{a*}(\alpha)$. ■

On choisit un système de coordonnées affines de $\mathbb{P}_N (x_1, \dots, x_n, y), n = N - 1$, tel que l'hyperplan à l'infini coupe le support de α proprement. On lui associe un système de coordonnées sur $G(1, N)$ en écrivant les équations des droites sous la forme : $x_i = a_i y + b_i$. Les droites pouvant s'écrire de cette manière sont les droites ne rencontrant pas le sous-espace de codimension deux $Y = Z = 0$, où (X_1, \dots, X_n, Y, Z) est un système de coordonnées projectives associé. On pose $x := (x_1, \dots, x_n)$, $a := (a_1, \dots, a_n)$.

En coordonnées affines, on a $p_a(x, y) := x - ay$.

Lemme 24 $\mathcal{R}(\alpha) = \sum_I u_{\text{card}(I)}(a, b) da^I \wedge db^{I^c}$, avec :

$$u_k(a, b) := \sum_{P_i} \text{Res}_{P_i} \alpha y^k / (l_1 \dots l_n),$$

et les P_i sont les différents points d'intersection de la droite $\Delta_{a, b}$ avec le support de α , et $l_i(x, y) := a_i y + b_i - x_i$.

Démonstration.

Ecrivons que $\mathcal{R}(\alpha)$ est l'image directe par $p_1 : U^* \times U \rightarrow U^*$ du courant l. r. $\text{res}_{U^*} \alpha \wedge dl_1/l_1 \wedge \dots \wedge dl_n/l_n$, avec $l_i(x, y) = a_i y + b_i - x_i$. D'après ce qu'on a vu du calcul de l'image directe, on obtient l'expression annoncée. ■

Démonstration du théorème 3 : Première étape.

On suppose momentanément que :

- i) $\mathcal{R}(\alpha)$ se prolonge en une forme *holomorphe* sur U^* , et
- ii) \tilde{U}^* vérifie la condition topologique suivante : les sections \tilde{D}_a sont contractibles.

Lemme 25 $u_k(a, b)$ se prolonge holomorphiquement dans \tilde{D}_a pour tout k .

Démonstration.

On a sur U^* : $\mathcal{R}(\alpha y^k) = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} u_{k+\text{card}(I)} da^I \wedge db^{I^c}$, pour tout $k \geq 0$. Comme $\mathcal{R}(\alpha y^k)$ est d -fermée sur U^* , on a $\frac{\partial}{\partial b_i} u_{k+n} = \frac{\partial}{\partial a_i} u_{k+n-1}$, pour tout $i, 1 \leq i \leq n$.

L'hypothèse que $\mathcal{R}(\alpha)$ se prolonge holomorphiquement nous donne déjà que u_0, \dots, u_n se prolongent holomorphiquement dans \tilde{U}^* ; donc en particulier, sur \tilde{D}_a pour tout a . Supposons que l'on ait prolongé u_{n+k} sur \tilde{D}_a , pour un certain entier $k \geq 0$.

Considérons la forme différentielle holomorphe sur \tilde{D}_a :

$$\phi_k := \sum_{i=1}^n \partial_{a_i} u_{n+k} db_i.$$

Elle est d -fermée sur D_a , donc sur \tilde{D}_a . D'après l'hypothèse de contractibilité, elle est donc d -exacte : $\phi_k = dv_k$, avec v_k une fonction holomorphe sur \tilde{D}_a . Comme sur D_a , elle est égale à du_{n+k+1} , on en déduit que u_{n+k+1} , qui est holomorphe sur D_a , se prolonge holomorphiquement sur \tilde{D}_a ($v_k + Cst$). Par récurrence, tous les $u_k(a, b), k \geq 0$ se prolongent holomorphiquement sur \tilde{D}_a .

■

Lemme 26 Sous les hypothèses précédentes, α se prolonge à \tilde{U} en courant l. r. .

Démonstration.

D'après ce qui précède, les $u_k(a, b) = p_{a*}(\alpha y^k)$ se prolongent holomorphiquement dans les domaines \tilde{D}_a . D'après le théorème sur les traces, la restriction de α à U_a se prolonge à \tilde{U}_a , en un courant α_a .

D'après le lemme ci-dessous, on a $\alpha_a|_{U \cap \tilde{U}_a} = \alpha|_{U \cap \tilde{U}_a}$, donc on peut en fait considérer le courant α_a sur l'ouvert linéairement 1-concave $U \cup \tilde{U}_a$.

Considérons la famille des couples (V, α_V) , avec $V \subset \tilde{U}$ un ouvert linéairement 1-concave contenant U , et α_V un prolongement l.r. de α sur V , avec la relation d'ordre naturelle (si $V \subset V'$, alors la restriction de $\alpha_{V'}$ à V coïncide avec α_V). Alors, cette famille admet un élément maximal, d'après le lemme de Zorn.

Soit (W, α_W) un tel élément maximal. D'après ce qui précède, tout cône \tilde{U}_x à sommet x dans W est contenu dans W .

Considérons un ouvert linéairement 1-concave $W \subset \tilde{U}$, tel que pour tout $x \in W$, le cône \tilde{U}_x soit inclus dans W . Alors $V = \tilde{U}$. En effet, W^* est ouvert dans \tilde{U}^* . Mais W^* est de plus fermé dans \tilde{U}^* . Soit en effet un point $t \in \tilde{U}^*$ sur la frontière de W^* , correspondant à une droite Δ_t . Alors, Δ_t doit rencontrer W (sinon on pourrait trouver un voisinage ouvert de t disjoint de W^*). Soit $P \in \Delta_t \cap W$. Alors, W contient le cône formé des droites passant par P et contenues dans \tilde{U} , et donc en particulier Δ_t . Par conséquent, $t \in W^*$. Comme \tilde{U}^* est connexe, on a donc $W^* = U^*$, donc $W = \cup_{t \in W^*} \tilde{U}_t = \tilde{U}$. ■

Lemme 27 $\alpha_a|_{U \cap \tilde{U}_a} = \alpha|_{U \cap \tilde{U}_a}$.

Démonstration.

Il s'agit de montrer que le courant α_a , défini sur \tilde{U}_a , ne dépend pas de a : $\alpha_a = \alpha_{a'}$ sur $\tilde{U}_a \cap \tilde{U}_{a'}$. Rappelons que α_a est le résidu de la forme méromorphe $\Psi_a := r_a(x, y)dx \wedge dy / P_a(x, y)$. Si on considère les u_k et les a_i qui entrent dans l'expression de Ψ_a comme des fonctions méromorphes sur U^* , on voit qu'on peut considérer Ψ_a comme une forme méromorphe sur $I_{\tilde{U}}$. Comme par ailleurs $\bar{\partial}[\Psi_a] = p_2^*(\alpha)$ sur I_U , on en déduit qu'on a aussi $\bar{\partial}[\Psi_a] = p_2^*(\tilde{\alpha})$ sur $I_{\tilde{U}}$, pour un courant l.r. $\tilde{\alpha}$ sur \tilde{U} . Cela signifie que lorsque l'on change a , le résidu de la forme méromorphe Ψ_a , $\bar{\partial}[\Psi_a] = \alpha_a$, ne change pas. ■

Deuxième étape : suppression de la condition topologique sur \tilde{U} .

On fait le même raisonnement que ci-dessus. Supposons donné un ouvert $V \subset \tilde{U}^*$ tel qu'on ait prolongé le courant α comme courant l.r. sur $\cup_{t \in V} \Delta_t$. Alors si $V \neq \tilde{U}^*$, on prend un point t de la frontière de V dans \tilde{U}^* , un voisinage ouvert V_t de t dans \tilde{U}^* , dont les sections sont contractibles, et on prolonge α comme courant l.r. dans $V_t' := \cup_{s \in V_t} \Delta_s$. On a donc prolongé α sur $(V \cup V_t)'$. D'après Zorn, il existe un ouvert V maximal, i.e. tel qu'on ne puisse plus prolonger α sur W' , avec $V \subset W \subset \tilde{U}$. Un tel ouvert est nécessairement égal à \tilde{U} .

Troisième étape : cas du prolongement méromorphe.

On suppose maintenant juste que $\mathcal{R}(\alpha)$ se prolonge méromorphiquement. Alors, l'ensemble polaire Z^* de $\mathcal{R}(\alpha)$ dans \tilde{U}^* correspond aux droites rencontrant un certain sous-ensemble analytique Z de codimension deux dans \tilde{U} . $\tilde{U} - Z$ est linéairement 1-concave, $\tilde{U} - Z^* = \tilde{U}^* - Z^*$ est connexe, on peut donc appliquer le théorème dans le cas du prolongement holomorphe, et trouver un prolongement $\tilde{\alpha}$ l.r. de α dans $\tilde{U} - Z$. Le théorème de Remmert-Stein permet de prolonger le support \tilde{Y} de $\tilde{\alpha}$ à travers Z ; on

notera le prolongement encore \tilde{Z} . Il reste donc à prolonger $\tilde{\alpha}$ à travers \tilde{Z} , grâce à notre hypothèse de prolongement méromorphe.

Lemme 28 *Soit D un domaine de \mathbb{C}^n . Considérons une fonction holomorphe f en dehors d'une hypersurface analytique $T \subset D$. Si df est méromorphe sur D , f se prolonge méromorphiquement sur D .*

Démonstration.

La question est locale. D'après le théorème de Hartogs, il suffit de prolonger méromorphiquement f au voisinage des points réguliers de T . On peut donc supposer T de la forme $\{y = 0\}$, avec des coordonnées affines (x_1, \dots, x_{n-1}, y) . On peut supposer f holomorphe dans une couronne $K := D \times \{|z| < \epsilon\} - \{|z| \leq \eta, \eta < \epsilon\}$. Alors, f peut s'écrire sur K comme $f = f_+ - f_-$, avec $f_+ = \sum_{k \geq 1} u_{-k}(x)y^{k-1}$, $f_- = \sum_{k \geq 0} u_k(x)/y^{k+1}$, avec

$$u_k(x) := 1/2i\pi \int_{|y|=\rho} f(x, y)y^k (\eta < \rho < \epsilon)$$

holomorphes sur D . Dire que f se prolonge méromorphiquement sur $D \times \{|z| \leq \epsilon\}$ revient à dire que $y^m f$ se prolonge holomorphiquement pour un certain m , donc que f_- comporte un nombre fini de termes non identiquement nuls. Remarquons grâce à la convergence uniforme, on peut dériver sous le signe somme. On obtient donc $f_y(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{-k-1}(x)ky^{k-1}$ sur K .

Supposons que df se prolonge méromorphiquement sur $D \times \{|z| \leq \epsilon\}$. Alors, il en est de même de f_z . On en déduit que seuls un nombre fini des $u_i, i \geq 0$ sont non identiquement nuls. Par conséquent, f aussi se prolonge méromorphiquement. ■

Le lemme précédent nous permet de montrer, suivant la technique employée ci-dessus, que les $u_k(a, b)$ se prolongent méromorphiquement sur D_a , pour tout entier $k \geq 0$. Le lemme 19 permet alors de prolonger $\tilde{\alpha}$ à travers Z dans \tilde{U} , en utilisant plusieurs centres de projection. Ceci termine la démonstration. ■

Corollaire 2 *Supposons $\mathcal{R}(\alpha)$ rationnel. Alors, α se prolonge en un courant l.r. sur \mathbb{P}_N .*

4 Une variante d'un théorème de Rothstein.

Considérons deux boules ouvertes dans l'espace \mathbb{C}^N , contenues l'une dans l'autre : $B \subset B'$. On se donne un sous-ensemble analytique de dimension pure $n \geq 2$ dans $B' - B$. Le théorème de Rothstein dit que ce sous-ensemble se prolonge en un sous-ensemble analytique de B' .

Montrons comment le théorème précédent d'inversion pour la transformation d'Abel-Radon permet de montrer une variante du théorème de Rothstein.

Cette variante est une généralisation du lemme 22 ci-dessus.

Théorème 4 *Soit U un domaine linéairement 1-concave de l'espace projectif \mathbb{P}_N . Supposons que U contient un 2-plan complexe. On se donne un courant α l. r. de type $(N, 1)$ dans U . Alors, α se prolonge dans \mathbb{P}_N en courant l.r. .*

Nous aurons besoin de la notion de pseudoconcavité au sens d'Andreotti. Un variété analytique connexe X est pseudoconcave au sens d'Andreotti s'il existe un domaine $U \subset X$ tel que pour tout point de la frontière $x \in \partial U$, pour tout voisinage ouvert U_x de x dans X , toute fonction holomorphe sur $U_x - \overline{U}$ est holomorphe en x . Il suffit pour vérifier cette propriété, d'après Hartogs, d'exhiber un disque analytique D de X , tel que $D \cap \overline{U} = \{x\}$.

Lemme 29 *Soit $U \subset \mathbb{P}_N$ un domaine linéairement 1-concave. Supposons que U contienne un 2-plan complexe. Alors si l'ouvert $U^* \subset G(1, N)$ est connexe, il est pseudoconcave au sens d'Andreotti.*

Démonstration.

On considère les U_ϵ définis par $|x_0|^2 + \dots + |x_{N-3}|^2 - \epsilon(|x_{N-2}|^2 + |x_{N-1}|^2 + |x_N|^2) < 0$, où $x_0 = x_1 = \dots = x_{N-3} = 0$ sont les équations du 2-plan. Ces domaines forment pour $\epsilon > 0$ un système fondamental de voisinages du 2-plan. Soit U_η un tel domaine contenu dans U .

Considérons le domaine $V := U_\eta^* \subset G(1, N)$. On se donne un point de la frontière $t \in \partial V$. Alors, la droite correspondante n'est pas contenue dans U_η . Elle coupe donc la frontière, en un certain point $x \in \overline{U_\eta}$. On considère un 2-plan H , contenant la droite Δ , et contenu dans $\overline{U_\eta}$. On se donne un point y de H en dehors de Δ . Alors, on considère les droites D_z reliant y et z , pour $z \in \Delta$. Alors, pour $z \neq x$, D_z est contenu dans U_η , puisque $H - \{x\} \subset U_\eta$. On a donc un $\mathbb{P}_1 \subset \overline{V}$, qui ne rencontre V qu'au point t , ce qui montre la pseudoconcavité, d'après ce qu'on a vu. ■

Démonstration du théorème. Soit U un domaine de l'espace projectif \mathbb{P}_N , contenant un 2-plan complexe. La transformée $\mathcal{R}(\alpha)$ est méromorphe sur U^* . P. Dingoyan ([2]) a montré que toute fonction méromorphe sur un ouvert pseudoconcave d'un variété algébrique est rationnelle. Comme U^* est pseudoconcave au sens d'Andreotti, on en déduit que $\mathcal{R}(\alpha)$ est rationnelle. D'après le corollaire ci-dessus, α se prolonge sur \mathbb{P}_N en un courant localement résiduel. ■

5 Questions ouvertes.

1. On pourrait généraliser le théorème 3, en ne supposant pas a priori que $\mathcal{R}(\alpha)$ se prolonge dans un domaine de la forme \tilde{U}^* , pour $\tilde{U} \subset \mathbb{P}_N$ contenant U . Le théorème deviendrait alors : si $\mathcal{R}(\alpha)$ se prolonge dans un domaine D contenant U^* , alors α se prolonge dans $D' := \cup t \in D \Delta_t$ comme courant l.r.. A fortiori, $\mathcal{R}(\alpha)$ se prolongerait alors dans l'”enveloppe” de D , i.e. D'^* .
2. Si B est juste pseudoconvexe dans \mathbb{P}_3 (mais pas \mathbb{C} -convexe), on aimerait avoir un exemple tel que α de bidegré $(3, 1)$ dans le complémentaire de B qui ne se prolonge pas. B doit rencontrer toutes hypersurfaces algébriques. Il suffirait de trouver une hypersurface de $U = \mathbb{P}_3 - B$ non algébrique.
3. On se donne un ouvert linéairement 2-concave $U \subset \mathbb{P}_N$ un courant l.r. de bidegré $(N, 2)$ dans U . On suppose $\mathcal{R}(\alpha) = 0$. On pourrait déduire de ce qui précède l'existence d'un prolongement l.r. $\tilde{\alpha}$ à \mathbb{P}_N , si l'on pouvait montrer que dans U , le fait que α est $\bar{\partial}$ -exact implique $\alpha = \bar{\partial}\beta$, avec β l.r. dans U .

References

- [1] J.-E Björk, *Residue currents and \mathcal{D} -modules on complex manifolds*, preprint, Dep. of Mathematics, Stockholm University, 1996.
- [2] P. Dingoyan, *Un phénomène de Hartogs dans les variétés projectives*, Math. Z. **232** (1999) 217-240.
- [3] B. Fabre, *Nouvelles variations sur des théorèmes d'Abel et Lie*, Thèse de l'université Paris VI, 2000.
- [4] B. Fabre, *On a problem of Griffiths : inversion of Abel's theorem for families of zero-cycles*, Ark. Mat. **41** (2003) 61-84.
- [5] P. Griffiths, *Variations on a theorem of Abel*, Invent. math. **35** (1976) 321-390.
- [6] S.G. Gindikin, G.M. Henkin, *Integral geometry for $\bar{\partial}$ -cohomology in q -linear concave domains in CP^n* , Functional Anal. Appl. **12**, (1978) 247-261.
- [7] G. Henkin, *The Abel-Radon transform and several complex variables*, Ann. of Math. Studies, **137** (1995) 223-275.
- [8] G. Henkin, M. Passare, *Holomorphic forms on singular varieties and variations on Lie-Griffiths theorem*, Inv. Math. **135**, (1999) 297-328.

- [9] Henkin G., *Abel-Radon transform and applications*, in The legacy of Niels Henrik Abel, Springer, 2003, 477-494.
- [10] M. Herrera , D. Lieberman, *Residues and principal values on complex spaces*, Math. Ann. **194** (1971) 259-294.
- [11] H. Kneser, *Einfacher Beweis eines Satzes über rationale Funktionen zweier Veränderlichen*, Hamburg Univ. Math. Sem. Abhandl. **9** (1933) 195-196.
- [12] M. Passare, *Residues, currents, and their relations to ideals of meromorphic functions*, Math. Scand. **62** (1988) 75-152.
- [13] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, 2nd ed., Hermann, Paris, 1966.

22, rue Emile Dubois, 75014 PARIS, France
bruno.fabre@iecn.u-nancy.fr